©2005. **Д. А. Сапронов**

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ–АБСОРБЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Установлена абсолютная разрешимость задачи Коши с растущими на бесконечности начальными данными для многомерных квазилинейных дважды вырождающихся параболических уравнений произвольного порядка типа нестационарной упругой диффузии - сильной абсорбции с переменным коэффициентом.

В области $G = \mathbb{R}^n \times (0,T)$ рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t + A_p^{(2m)}u + B_\lambda u \equiv u_t +$$

$$+(-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t,x,u,D_xu,...,D_x^m u) + C(x,t)b(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n),\ 0 \le C(x,t) \in L_{\infty,loc}(G), \tag{2}$$

где каратеодориевы функции $a_\alpha(t,x,\xi)$ и непрерывная функция $b(t,s)$ удовлетворяют условиям :

$$a_\alpha(x,t,\xi^{(0)},...,\xi^{(m-1)},0) = 0 \quad \forall (x,t,\xi^{(0)},...,\xi^{(m-1)}) \in G \times \mathbb{R}^{N(m-1)}, \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} (a_\alpha(t,x,\xi) - a_\alpha(t,x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ge d_0|\xi^m - \eta^m|^{p+1}, \tag{4}$$

$$\forall (t,x,\xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)},\ \forall (t,x,\eta) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)},\ d_0 > 0, p > 1,$$

$$|a_\alpha(t,x,\xi) - a_\alpha(t,x,\eta)| \le d_1|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{p-1}, \tag{5}$$

$$\forall (t,x,\xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)},\ \forall (t,x,\eta) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)},\ d_1 < \infty,$$

$$|b(s,t)| \le d_2|s|^\lambda \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+, \quad d_2 < \infty,\ \lambda > p, \tag{6}$$

$$(b(s,t) - b(v,t))(s - v) \ge d_3|s - v| \tag{7}$$

$$\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+, \quad \forall\, (v,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+, \quad d_3 > 0.$$

Здесь $N(m)$- число различных m-мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \le m$.

Изучение разрешимости граничных задач для этих уравнений было начато в статье [1], в которой было введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи Коши для уравнения второго порядка ,близкого по стуктуре к (1) с $C(x,t) \equiv 0$, а также установлены его существование и единственность. В дальнейшем теории вырождающихся параболических уравнений было посвящено множество работ (см. [2]- [4] и библиографию к ним). Хорошо также известна, основанная на методе монотонности, теория разрешимости граничных задач для общих уравнений (1) (см. [5], [6]). Некоторые результаты о разрешимости дважды вырождающихся уравнений структуры (1) с $p \ne 1$ при наличии младших членов (нелинейной абсорбции) установлены в [7], [8].

Точные классы разрешимости уравнений (1) при $C(x,t) \equiv 0$ с неограниченной энергией найдены в [9]. Существование и единственность решения задачи Коши для многомерного уравнения ньютоновской фильтрации

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta\, u + C(x,t)|u|^{\lambda-1}u = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T),$$

$$0 \le u_0(x) = u(x,0) \in C(\mathbb{R}^n), \quad 0 < q < 1 < \lambda,$$

$$0 < C(x,t) \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad 0 < \alpha < 1,$$

при произвольно растущих на бесконечности начальных данных была установлена в [10].

Определение 1. Энергетическим обобщенным решением $u(x,t)$ задачи Коши (1)-(2) мы назовем функцию $u(x,t)$ такую, что в произвольной ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) \in W = \left\{ \begin{array}{r} v(x,t) : v \in L_{p+1}\big(0,T; W^m_{p+1}(\Omega)\big) \cap L_{\lambda+1}\big(\Omega \times (0,T)\big), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T; W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega)\big) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\big(\Omega \times (0,T)\big) \end{array} \right\},$$

а также удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T (u_t, w)\, dt + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} \Big[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,u,D_x u, ..., D^m_x u) D^\alpha_x (u \cdot w) +$$

$$+ C(x,t) b(u,t) w\Big]\, dx\, dt = 0 \tag{8}$$

при любой $w(x,t) \in L_{p+1}\big(0,T; \overset{0}{W}{}^{m}_{p+1}(\Omega)\big) \cap L_{\lambda+1}\big(\Omega \times (0,T)\big)$, а также условию (2) в смысле пространства $C([0,T]; L_2(\Omega))$.

Замечание 1. Из определения 1 следует справедливость следующего интегрального тождества:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,T_0)|^2 \phi(x,T_0)\, dx + \int_{(0,T_0)\times\Omega} \Big[-\frac{1}{2}|u(x,t)|^2 \phi'_t(x,t) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,D_x u, \cdots, D^m_x u) D^\alpha_x (u \cdot \phi) + C(x,t) b(u,t) \phi(x,t) \Big]\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |u_0(x)|^2 \phi(x,0)\, dx \tag{9}$$

при произвольных $0 < T_0 < T < \infty$, $\phi \in \overset{0}{C}{}^{m,1}_{x,t}\big(\overline{\Omega} \times [0,T_0]\big)$.

Введем следующие семейства областей:

$$\Omega(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}, \quad G_T(s) = \Omega(s) \times (0,T)\ \forall\, s > 0,\ 0 < T < \infty.$$

В дальнейшем через c будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи и не зависящие от s и t.

Теорема. *Пусть в (1) выполнено* $\lambda \le p + \frac{2m(p+1)}{n}$ *и* $C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \in L_{1,loc}(G)$. *Тогда в G существует обобщенное энергетическое решение задачи (1) – (2) при любом* $0 < T < \infty$ *и для него справедлива следующая априорная оценка:*

$$I_T(s) \equiv \int\limits_{G_T(s)} |u|^{p+1}\,dx\,dt \le c\Big(\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt\Big)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \times$$

$$\times\Big(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}}\int\limits_{G_T(2s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt + h(2s)\Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} \quad \forall s > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Введем срезающую функцию $\zeta_j(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\zeta_j(x) = 1$ при $|x| \le j$, $\quad \zeta_j(x) = 0$ при $|x| \ge j+1$, $0 \le \zeta_j(x) \le 1$ при $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots$ и определим последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x) = u_0(x)\zeta_j(x),$$

приближающих $u_0(x)$в пространстве $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим последовательность задач Коши–Дирихле вида

$$u_t^{(j)} + A_p^{(2m)}u^{(j)} + B_\lambda u^{(j)} = 0,\ (x,t) \in G_T(j+1), \tag{11}$$

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x) \in L_2(\Omega(j+1)) \tag{12}$$

$$u^{(j)}\big|_{\partial\Omega(j+1)} = 0 \quad \forall\, t \in (0,T). \tag{13}$$

Согласно интерполяционному неравенству Ниренберга–Гальярдо (см. [9],[11]), характеризующему вложение $L_2(\Omega) \cap W_{p+1}^m(\Omega) \subset L_{\lambda+1}(\Omega)$,теории нелинейных эволюционных уравнений с монотонными операторами [5], [6], лемме 3 (см. ниже), задача (11) – (13) при $\lambda \le p + \frac{2m(p+1)}{n}$ имеет решение

$$u^{(j)}(x,t) \in L_{p+1}\big(0,T; W_{p+1}^m(\Omega(j+1))\big),\ u_t^{(j)} \in L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega(j+1))\big)$$

при $\forall\, j = 1, 2, \ldots$ Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $u^{(j)}(x,t)$*–энергетическое решение задачи (11) – (13). Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\int\limits_{\Omega_T(s-\delta)} |u^{(j)}|^2\,dx + T^{-1}\int\limits_{G_T(s-\delta)} |u^{(j)}|^2\,dx\,dt + \int\limits_{G_T(s-\delta)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{G_T(s-\delta)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le c\Big(\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{G_T(s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt + h(s)\Big) \tag{14}$$

$\forall\, 0 < s < j+1$, $\forall\, 0 < \delta < s$, *где* $h(s) = \int\limits_{\Omega(s)} |u_0|^2\,dx$.

Доказательство. Введем срезающую функцию $\eta(\tau) \in C^m(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

$$\eta(\tau) = 1 \quad \forall\, \tau \le 0, \quad \eta(\tau) = 0 \quad \forall\, \tau \ge 1, \quad 0 \le \eta(\tau) \le 1 \quad \forall \quad \tau \in \mathbb{R}^1,$$

$$|D^i\eta(\tau)| \le d_4 < \infty, \quad |i| = 1, 2, ..., m.$$

Подставим в интегральное тождество (9) в качестве срезающей функции

$$\phi(x,t) = \exp(-tT^{-1})\eta^{m(p+1)}\Big(\frac{\tau - |x| + \delta}{\delta}\Big).$$

После преобразований с использованием оценок (3) – (7), свойств функции $\eta(\tau)$, неравенства Ниренберга – Гальярдо, характеризующего вложение $W^m_{p+1}(\Omega) \subset W^i_{p+1}(\Omega)$ при $i < m$, а также неравенств Гельдера и Юнга с ε , приходим к соотношению:

$$\int\limits_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx + T^{-1}\int\limits_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx\,dt + \int\limits_{G_T(s)} |\nabla^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le \varepsilon \int\limits_{G_T(s+\delta)} |\nabla^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$+c(\varepsilon)\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{G_T(s+\delta)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt + ch(s+\delta) \tag{15}$$

$\forall s > 0, \forall\,\delta > 0 : s + \delta < j+1, \forall\,\varepsilon > 0$. Полагая последовательно в (15) $\delta_i = 2^{-i}\delta$, $s_i = s_0 + \delta_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и итерируя полученные неравенства по i k раз, получаем соотношение:

$$\int\limits_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx + T^{-1}\int\limits_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx\,dt + \int\limits_{G_T(s)} |\nabla^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le \varepsilon^{k+1}\int\limits_{G_T(s+2\delta)} |\nabla^m_x u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{k}(2^{m(p+1)}\varepsilon)^j\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{G_T(s+2\delta)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt + c\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i h(s+2\delta) \tag{16}$$

$\forall s > 0, \forall\,\delta > 0 : s + \delta < j+1, \forall\,\varepsilon > 0$. Полагая в (16) $\varepsilon = 2^{-m(p+1)-1}$ и устремляя в полученном $k \to \infty$, после замены аргументов получим требуемую оценку. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $u^{(j)}(x,t)$– энергетическое решение задачи (11) – (13). Тогда для семейства $u^{(j)}(x,t)$ справедлива следующая равномерная оценка:*

$$I^{(j)}_T(s) \equiv \int\limits_{G_T(s)} |u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt \le c\Big(\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt\Big)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \times$$

$$\times\Big(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}}\int\limits_{G_T(2s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt + h(2s)\Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}}, \tag{17}$$

$\forall\, s > 0 : 2s < j+1.$

Доказательство. Применим к правой части соотношения (14) неравенство Юнга с ε. В результате получим:

$$\int\limits_{\Omega_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx + T^{-1}\int\limits_{G_T(s)} |u^{(j)}|^2\,dx\,dt + \int\limits_{G_T(s)} |\nabla_x^m u^{(j)}|^{p+1}\,dx\,dt$$

$$\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le \varepsilon \int\limits_{G_T(s+\delta)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$

$$+c(\varepsilon)\delta^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int\limits_{G_T(s+\delta)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt + ch(s+\delta) \tag{18}$$

$\forall\, s>0,\ \delta>0 : s+\delta<j+1$. Применяя к соотношению (18) итеративную процедуру, аналогичную той, которая позволила нам вывести неравенство (14), после замены в полученном s на δ приходим к следующему неравенству:

$$\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le c\Big(s^{-\frac{m(p+1)(\lambda+1)}{\lambda-p}} \int\limits_{G_T(2s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt + h(2s)\Big), \tag{19}$$

$\forall\, s>0 : 2s<j+1$. В силу неравенства Гельдера имеем:

$$I_T^{(j)}(s) \le \Big(\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\,dx\,dt\Big)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}} \Big(\int\limits_{G_T(s)} C(x,t)|u^{(j)}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}}\ \forall\, s>0. \tag{20}$$

Оценивая правую часть (19) с помощью неравенства (20), приходим к (17). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $p>1$, $\lambda \le p+\frac{2m(p+1)}{n}$, то имеет место вложение*

$$C\big([0,T];L_2(\Omega)\big) \cap L_{p+1}\big(0,T;\overset{0}{W}{}^m_{p+1}(\Omega)\big) \subset L_{\lambda+1}\big((0,T)\times\Omega\big). \tag{21}$$

Доказательство. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо– Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \le d_5 \|D_x^m u\|^{\theta}_{L_{p+1}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L_{q+1}(\Omega)}, \tag{22}$$

где $u(x,t)$– произвольная по x функция из пространства $\overset{0}{W}{}^m_{p+1}(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $0<d_5<\infty$,

$$0<\theta=\frac{n(\lambda-1)(p+1)}{(\lambda+1)(n(p-1)+2m(p+1))}\le 1.$$

Возведя неравенство (22) в степень $\lambda+1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гёльдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega)} \le d_5 T^{\frac{1-\sigma}{\lambda+1}} \|D_x^m u\|^{\theta}_{L_{p+1}\left((0,T)\times\Omega\right)} \|u\|^{1-\theta}_{C\left([0,T];L_{q+1}(\Omega)\right)},$$

$0 < \sigma = \theta\frac{\lambda+1}{p+1} < 1$, откуда следует (21). Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. В силу леммы 2 имеем оценку

$$||u^{(j)}||_{L_{p+1}\left(0,T,W^m_{p+1}(\Omega(s))\right)} \le C(s) < \infty \quad \forall\, s < 2(j+1), \tag{23}$$

причем $C(s)$ не зависит от j. Поскольку $u^{(j)}$ – решение задачи (11) – (13), а оператор $A+B$ – нелинейный ограниченный оператор:

$$A+B : L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s))\big) \longrightarrow L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T;W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega(s))\big)$$

то в силу (23) имеем также

$$||u_t^{(j)}||_{L_{\frac{p+1}{p}}\left(0,T,W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega(s))\right)} \le C_1(s) < \infty \quad \forall\, s < 2(j+1).$$

Обозначим через $V(\Omega(s))$ банахово пространство с нормой

$$||v||_{V(\Omega(s))} = ||v||_{L_{p+1}\left(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s))\right)} + ||v||_{L_{\frac{p+1}{p}}\left(0,T;W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega(s))\right)}.$$

В силу ограниченности $||u^{(j)}||_{V(\Omega(s))}$ $\forall\, s < 2(j+1)$ из последовательности $u^{(j)}$ можно извлечь слабо сходящуюся в $V(\Omega(s))$ подпоследовательность, которая, в свою очередь, благодаря компактности вложения

$$V(\Omega(s)) \subset L_{p+1}\big(0,T;W^{m-1}_{p+1}(\Omega(s))\big)$$

будет фундаментальной в $L_{p+1}\big(0,T;W^{m-1}_{p+1}(\Omega(s))\big)$. Назовем выбранную подпоследовательность снова $u^{(j)}$ и докажем ее сходимость в пространстве $L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s))\big)$. Обозначим $v_{ij} = u^{(i)} - u^{(j)}$, $i,j > 2^{-1}s - 1$ и подставим в интегральное тождество (9) в качестве пробной функции

$$w = v_{ij}\eta^{m(p+1)}(s - |x| + 1).$$

После преобразований с использованием оценок (4)– (7) и свойств функции η получаем:

$$\int\limits_{G_T(s-1)} |\nabla_x^m v_{ij}|^{p+1}\,dx\,dt \le c\big(R_T(s)^{\frac{p}{p+1}} \sum_{|\alpha|<m} (\int\limits_{G_T(s)} |D_x^m v_{ij}|^{p+1}\,dx\,dt)^{\frac{1}{p+1}} +$$

$$+R_T(s)^{\frac{p-1}{p+1}} (\sum_{|\alpha|<m} \int\limits_{G_T(s)} |D_x^m v_{ij}|^{p+1}\,dx\,dt)^{\frac{2}{p+1}}\ \forall\, s < 2(i+1),\ \forall\, s < 2(j+1), \tag{24}$$

где

$$R_T(s) = \sum_{|\alpha|\le m} \int\limits_{G_T(s)} (|D_x^\alpha u^{(i)}| + |D_x^\alpha u^{(j)}|)^{p+1}\,dx\,dt$$

Из (24) в силу (23) и фундаментальности $u^{(j)}$ в пространстве

$$L_{p+1}\big(0,T;W^{m-1}_{p+1}(\Omega(s))\big)$$

получаем сходимость $u^{(j)}$ в пространстве $L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s-1))\big)$. Поскольку оператор

$$A+B: L_{p+1}\big(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s))\big) \longrightarrow L_{\frac{p+1}{p}}\big(0,T;W^{-m}_{\frac{p+1}{p}}(\Omega(s))\big)$$

непрерывен, то имеет место следующая сходимость:

$$||u^{(i)}-u^{(j)}||_{L_{p+1}\left(0,T;W^m_{p+1}(\Omega(s-1))\right)} \to 0,\ i,j\to\infty.$$

Зафиксируем теперь последовательность $s_i = \frac{i+1}{4}$. С помощью диагонального процесса выберем теперь последовательность $u^{(j)}$, $j > i+1$ фундаментальную в пространстве $V(\Omega(s_i))$, $\forall i\in\mathbb{N}$. Предел этой последовательности $\lim\limits_{j\to\infty} u^{(j)} = u(x,t) \in V_{loc}(\mathbb{R}^n)$ в силу непрерывности вложения

$$V(\Omega(s)) \subset C\big(0,T;L_2(\Omega(s))\big)$$

будет удовлетворять интегральному тождеству (8) и начальному условию (2), и поэтому будет являться энергетическим обобщенным решением задачи (1)– (2). Теорема доказана.

1. *Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. N 8. С. 667-704.
2. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка// УМН. 1987. Т. 42. N 2. С. 135-176.
3. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations//New York: Springer – Verlag. 1993.
4. *Калашников А.С.* О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными параболическими уравнениями// Труды сем. им. Г.И. Петровского. 1975. N. 1. С. 135-144.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач// М.: "Мир", 1972.
6. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНИТИ, 1976. С.5-130.
7. *Grange O., Mignot F.* Sur la Resolution d'une Equation et d'une Inequation Paraboliques non Lineaires// J. Funct. Anal. 1972. V. 11. N 1, P. 77-92.
8. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 279, No.3, 373-394 (1988).
9. *Шишков А.Е.* Эволюция носителя решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка // Мат. сборник. 1995. Т. 186. N 12. С. 151-172.
10. *Гладков А.Л.* Об уравнении фильтрации - абсорбции с переменным коэффициентом // Дифф. урав-не-ния. 1991. т. 37. N 1. С. 42-47.
11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева// Изд-во ЛГУ, 1985.

Донецкий национальный университет
ул. Университетская, 24
83055, Донецк, Украина

Получено 22.12.2004